Механіка матэрыяльнага пункта

Валянцін Асташынскі

17 верасня 2007 г.

1 Асноўныя азначэнні

Прасцейшай часткай фізічных з'яў, але вельмі важнай для фізікі ў цэлым, з'яўляецца *механічны рух цел*. Законы такога руху ўключаюць у сабе ня толькі рух свабодных цел, але і рух уздзейнічаючых паміж сабою цел.

Механічны рух — змяненне становішча цел ці іх частак у прасторы адно адносна аднаго з цягам часу. Стан спакою таксама з'яўляецца прыватным выпадкам механічнага руху.

Механікай называецца раздзел фізікі, які вывучае заканамернасці механічнага руху і прычыны, што яго вызываюць.

Механічны рух зручней вывучаць на прыкладзе ідэалізаваных мадэляў, такіх як *матэрыяльны пункт*.

Матэрыяльным пунктам называюць фізічную мадэль рэальнага цела, памеры якога можна не ўлічваць ва ўмовах, якія вызначаюцца пры рашэнні канкрэтных задач.

Як паказвае дослед, для поўнага задання становішча матэрыяльнага пункта ў прасторы адносна *цела адліку* (якое мы маем магчымасць выбіраць адвольна) неабходна задаць тры *каардынаты* пункта, або яго *радыус-вектар*. Як вядома з вектарнага аналізу, каардынаты пункта будуць вызначацца як праекцыі радыус-вектара на адпаведныя восі і наадварот, радыус-вектар — вектарная сума каардынатаў, памножаных на адпаведныя орты.

Сістэмай адліку называецца сістэма каардынатаў, жорстка звязаная з целам адліку, *разам з абранай прыладай для вымярэння часу* (гадзіннікам).

Пад час руху матэрыяльнага пункта змяняецца яго становішча ў прасторы. Адпаведна з гэтым радыус-вектар матэрыяльнага пункта можна разглядаць як функцыю часу t:

$$\vec{r} = \vec{r}(t), \tag{1}$$

якая называецца **раўнаннем руху**. Вектарнае раўнанне (1) раўназначнае сістэме трох скалярных ўраўненняў $x(t),\ y(t),\ z(t)$.

Лінія, якую з цягам часу ў дадзенай сістэме адліку апісвае канец радыус-вектара $\vec{r}$ матэрыяльнага пункта называецца **траекторыяй руху**. Гэта лінія, уздоўж якой матэрыяльны пункт рухаецца ў прасторы.

Змены становішча пункта ў прасторы магчыма апісаць пры дапамозе двух велічынь — скалярнай і вектарнай.

Шлях s матэрыяльнага пункта за некаторы прамежак часу — скалярная фізічная велічыня, роўная даўжыні часткі траекторыі, пройдзенай пунктам за гэты час.

Перамяшчэннем $\Delta\vec{r}$ матэрыяльнага пункта за дадзены прамежак часу называецца вектар, які злучае пачатковае становішча гэтага пункта з канцавым. Калі пачатковае становішча зададзена радыус-вектарам $\vec{r}_0$, а ў некаторы момант часу радыус-вектар пункта роўны $\vec{r}(t)$, то перамяшчэнне ўяўляе сабою змяненне радыус-вектара

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t) - \vec{r}_0. \tag{2}$$

> Трэба азначыць, што модуль вектара перамяшчэння роўны даўжыні шляху толькі пры руху матэрыяльнага пункту уздоўж прамой лініі без змены накірунку руху. Ва ўсіх астатніх выпадках модуль вектара перамяшчэння меншы за даўжыню шляху.

Механічны рух можа адрозніваца хуткасцю змены каардынатаў з цягам часу. У сувязі з гэтым уводзяць паняцце вектара **імгненнай скорасці** (ці проста скорасці) $\vec{v}$. Яго вызначаюць як ліміт адносіны прырашчэння радыус-вектара перамяшчэння да таго прамежку часу, за які гэтае перамяшчэнне адбылося, пры ўмове, што сам гэты прамежак часу імкнецца да нуля:

$$\vec{v} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \tag{3}$$

Пад час руху матэрыяльнага пункта яго скорасць можа быць як зменнай, так і нязменнай. Рух з нязменнай скорасцю ($\vec{v} = \mathrm{const}$) называецца *раўнамерным* і *прамалінейным*. У гэтым выпадку скорасць можна вызначыць як адносіну перамяшчэння да таго прамежку часу, за які гэтае перамяшчэнне адбылося ў незалежнасці ад яго працягласці:

$$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \tag{4}$$

У выпадку нераўнамернага руху можна ўвесці сярэднія велічыні, характарызуючыя інтэнсіўнасць руху ў цэлым.

> У матэматыцы для вылічэння сярэдняга значэння неабходна ўлічваць вагавы множнік кожнай падзеі, якая дае свой уклад у сярэдняе. Напрыклад, калі цягам часу t_1 скорасць аўтамабіля была роўная $\vec{v}_1$, а цягам часу t_2 яна роўная $\vec{v}_2$, згодна з азначэннем сярэдняй-узважаннай па часе скорасці
>
> $$< \vec{v} > = \frac{\vec{v}_1 t_1 + \vec{v}_2 t_2}{t_1 + t_2}.$$
>
> У лічніку атрыманага дробу згодна з (4) будзе вектарная сума асобных перамяшчэнняў, а ў назоўніку — сумарны прамежак часу.

Сярэдняй скорасцю называецца вектар, роўны адносіне вектара перамяшчэння да прамежку часу, за які гэтае перамяшчэнне адбылося:

$$< \vec{v} > = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \tag{5}$$

Аналагічна (5) можна ўвесці скалярную велічыню, якая будзе характарызаваць інтэнсіўнасць змены шляху з цягам часу. Назавем **сярэдняй хуткасцю**[1] адносіну пройдзенага шляху да таго прамежку часу, за які гэты шлях пройдзены:

$$< v > = \frac{s}{\Delta t}. \tag{6}$$

[1] Такім чынам, тэрмін «хуткасць», як і тэрмін «скорасць», вызначае інтэнсіўнасць руху, але першы абазначае вектарную велічыню, тады як другі — скалярную. Падобнае раздзяленне паняццяў з дапамогай асобных словаў адсутнічае ў рускай мове, але існуе ў ангельскай: слову «хуткасць» адпавядае “speed”, а «скорасць» — “velocity”.

Азначым, што модуль сярэдняй скорасці супадае з сярэдняй хуткасцю толькі ў выпадку раўнамернага прамалінейнага руху.

У выпадку руху са зменнай скорасцю велічыня $\Delta\vec{v}/\Delta t$ адрозніваецца ад нуля. Па аналогіі з (3) і (4) можна ўвесці велічыні, характарызуючыя інтэнсіўнасць змены скорасці. Назавем **імгненным паскарэннем** $\vec{a}$ вектар, роўны ліміту адносіны прырашчэння скорасці да таго прамежку часу, за які гэтая змена адбылася, пры ўмове, што сам гэты прамежак часу імкнецца да нуля:

$$\vec{a} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}. \tag{7}$$

Тады **сярэднім паскарэннем** называецца вектар, роўны адносіне змянення скорасці да прамежку часу, за які гэта змяненне адбылося:

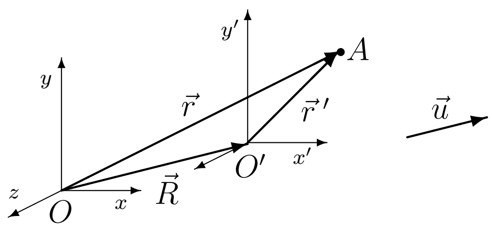
$$< \vec{a} > = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}. \tag{8}$$

Рух, пры якім паскарэнне адрозніваецца ад нуля, называецца *паскораным.*

2 Пераўтварэнні Галілея

Як азначалася вышэй, становішча матэрыяльнага пункта ў прасторы, таксама як і яго рух, вызначаецца адносна адвольна выбранага цела адліку з якім, у сваю чаргу, жорстка звязана сістэма адліку. Ці магчыма адшукаць раўнанне руху у некаторай сістэме адліку $\vec{r}(t)$, калі вядома раўнанне руху $\vec{r}\,'(t')$ у другой сістэме адліку? Напрыклад, ведаючы як рухаецца пасажыр у вагоне цягніка, ці магчыма адшукаць закон ягонага руху адносна перона, уздоўж якога рушыцца цягнік?Для адказу на гэтае пытанне трэба выявіць, як пераўтвараюцца прасторава-часавыя велічыні пры такім пераходзе.

Разгледзім дзве сістэмы адліку, звязаныя з пунктамі O і O', паказаныя на малюнку 1. Няхай у пачатку адліку часу ($t = 0$) каардынаты гэтых пунктаў супадаюць, а сістэма, звязаная з пунктам O' рушыцца з нязменнай скорасцю $\vec{u}$ адносна пункта O. Тады, калі ў



Малюнак 1: Да пераўтварэнняў Гаділея.

некаторы момант часу t пункт O' вызначаецца ў сістэме O радыус-вектарам $\vec{R}$, а некаторы пункт A у сістэме O' вызначаецца радыус-вектарам $\vec{r}\,'$, то згодна з правілам трохкутніка (глядзі раўнанне (1) у «Элементах вектарнага аналізу») радыус-вектар $\vec{r}$ таго ж самага пункта A у сістэме O вызначаецца сумаю $\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}\,'$. Дададзім да гэтага ўмову, што час у двух сістэмах працякае аднолькава (памеры цел і ход часу не залежаць ад таго, рухаюцца целы, або не) і атрымаем сістэму ўраўненняў

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{R} + \vec{r}\,', \\ t = t', \end{cases} \tag{9}$$

якая завецца **пераўтварэннямі Галілея**.

Няхай ў момант часу t_1 становішча пункту A у сістэме O' вызначаецца радыус-вектарам $\vec{r}'_1$, пункт O' вызначаецца ў сістэме O радыус-вектарам $\vec{R}_1$, тады як у момант часу t_2 становішча пункту A у сістэме O' — радыус-вектар $\vec{r}\,'_2$. Адпаведна з (4), перамяшчэнне пункта O' ў сістэме O за гэты час $\vec{R}_2 - \vec{R}_1 = \vec{u}(t_2 - t_1)$. Тады з першага раўнання сістэмы (9) вынікае

$$\begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{R}_1 + \vec{r}\,'_1, \\ \vec{r}_2 = \vec{R}_2 + \vec{r}\,'_2 = \vec{R}_1 + \vec{u}(t_2 - t_1) + \vec{r}\,'_2, \end{cases}$$

ці

$$\Delta\vec{r} = \vec{u}\Delta t + \Delta\vec{r}\,'. \tag{10}$$

Падзяліўшы раўнанне (10) на прамежак часу $\Delta t = (t_2 - t_1)$ атрымаем

$$\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \vec{u} + \frac{\Delta\vec{r}\,'}{\Delta t},$$

або,

$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{v}\,', \tag{11}$$

дзе $\vec{v}$ і $\vec{v}\,'$ — скорасці пункта A у сістэмах O і O' адпаведна.

Атрыманае раўнанне (11) з'яўляецца класічным **законам складання скарасцей**. Такім чынам, скорасць у фізіцы — паняцце адноснае: яе значэнне залежыць ад выбару сістэмы адліку, у прыватнасці: калі ў некаторай сістэме адліку цела знаходзіцца ў стане спакою, то адносна ўсіх іншых цел яно, наогул кажучы, рушыцца з той ці іншай нязменнай скорасцю. Менавіта таму ў азначэнне механічнага руху (раздзел 1) мы дадалі стан спакою ў якасці прыватнага выпадку руху.

Калі пункт A рушыцца паскорана, на падставе закона складання скарасцей (11) можна запісаць, што

$$\vec{v}_2 - \vec{v}_1 = (\vec{u} + \vec{v}\,'_2) - (\vec{u} + \vec{v}\,'_1) = \vec{v}\,'_2 - \vec{v}\,'_1,$$

ці

$$\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{v}\,'}{\Delta t}. \tag{12}$$

Апошняе раўнанне азначае, што *паскарэнні цел у двух сістэмах, якія рухаюцца з нязменнай скорасцю адна адносна адной, аднолькавы.*

3 Закон руху ў механіцы

Перш за ўсё разгледзім рух свабодных цел. *Пад свабоднымі мы будзем разумець фізічную мадэль цела, настолькі аддаленага ад усіх іншых цел, што яго узаемадзеянні з імі можна не прымаць да ўвагі.* Для свабодных цел любое становішча ў прасторы ніяк не ўплывае на яго стан, бо навакольная прастора лічыцца аднароднай, а калі яшчэ ўлічыць аднароднасць часу (фізічную аднолькавасць усіх момантаў часу дзеля свабоднага цела), то вынікае, што *свабоднае цела паслядоўна змяняе сваё месцазнаходжанне з цягам часу.* Можна выбраць такую сістэму адліку, у якой рух свабоднага цела будзе раўнамерны і прамалінейны. Такі рух цел завецца *рухам па інерцыі*, а падобныя сістэмы адліку называюцца **інерцыяльнымі**[2].

Калі мы зададзім адну інерцыяльную сістэму адліку, існуе вялікая колькасць іншых сістэм адліку, якія рухаюцца з нязменнай скорасцю адносна першай і, адпаведна з раўнаннем (12), рух свабодных цел у гэтых сістэмах таксама будзе раўнамерны і прамалінейны. Трэба азначыць, што інерцыяльная сістэма адліку з'яўляецца фізічнай мадэллю рэальнай

[2]Закон, сцвярджаючы існаванне такіх сістэм адліку вядомы як *першы закон Ньютана.*

сістэмы адліку, якая рухаецца са скорасцю, значэнне якой вызначаецца як пастаяннае пры дадзенай дакладнасці вымярэнняў.

У выпадку несвабодных цел (узаемадзейнічаючых з асяроддзем), іх хуткасць, у агульным выпадку, ужо не будзе роўная нулю — з'явіцца паскарэнне. Такім чынам паскарэнне[3]

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}, \tag{13}$$

дзе $\vec{F}$ — сіла, вектарная велічыня, якая з'яўляецца мерай знешняга ўздзеяння, а m — маса, скалярная велічыня, якая з'яўляецца механічнай характарыстыкай цел[4].

У інерцыяльных сістэмах адліку, згодна з раўнаннем (12), паскарэнне з'яўляецца інварыянтнай велічынёй (аднолькавай ва ўсіх сістэмах). У класічнай механіцы сілы залежаць толькі ад адлегласці паміж узаемадзейнічаючымі целамі, якія таксама не змяняюцца пры пераходзе ад адной сістэмы да другой. Такім чынам, каб раўнанне (13) праўдзілася ва ўсіх інерцыяльных сістэмах, *маса цела павінна быць таксама велічынёй інварыянтнай.*

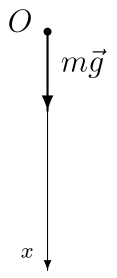
Стан матэрыяльнага пункта ў механіцы вызначаецца заданнем яго каардынатаў і скорасці. Закон руху (13) дазваляе вызначыць яго стан у розныя моманты часу. Для ілюстрацыі гэтага разгледзім прыклад руху матэрыяльнага пункта ў гравітацыйным полі.

Асноўная уласцівасць гравітацыйнага поля заключаецца ў тым, што *ўсе целы незалежна ад іх масы ў зададзеным полі прыцягнення падаюць з аднолькавым паскарэннем.* У полі прыцягнення Зямлі, на малых адлегласцях ад яе, паскарэнне свабоднага падзення $|\vec{g}| = 9,8$ м/c^2. У гэтым выпадку на цела масы m дзейнічае сіла $m\vec{g}$.

З самалёта, які ляціць з нязменнай гарызантальнай скорасцю $\vec{v}_0$, у момант праходжання краю абрыву скідваюць груз. Спачатку вызначым, як рухаецца гэты груз у сістэме адліку, звязанай з самалётам. Выпішам закон руху грузу: $m\Delta\vec{v}/\Delta t = \vec{F}$, дзе $\vec{F} = m\vec{g}$. Тады $\Delta\vec{v}/\Delta t = \vec{g}$, ці $\vec{v} = \vec{g}\Delta t$. Прасумуем апошняе раўнанне па ўсім малым прамежкам часу[5]:

$$\vec{v} = \vec{g}\sum_i \Delta t_i = \vec{g}t. \tag{14}$$

Сюды не ўваходзіць у якасці складаемага $\vec{v}_0$ таму, што ў сістэме адліку, звязанай з самалётам, пачатковая скорасць грузу роўная нулю. Выберам вось x у накірунку руху



Малюнак 2: Рух грузу у сістэме адліку, звязанай з самалётам.

грузу. У праекцыі на гэтую вось скорасць $v_x = gt$. Згодна з азначэннем імгненнай скорасці $v_x = \Delta x/\Delta t$ пры ўмове, што прамежак часу Δt вельмі малы. Адсюль $\Delta x = v_x\Delta t$. Каб

[3] Гэтая залежнасць паскарэння цела ад знешняга ўздзеяння на яго вядомая як *другі закон Ньютана*

[4] У сваёй працы «Матэматычныя пачаткі натуральнай філасофіі» Ісак Ньютан даў наступнае азначэнне: «*Колькасць матэрыі (маса) ёсць адпавядаючая ёй мера, якая вызначаецца прапарцыйнаю шчыльнасці і аб'ёму яе*».

[5] У матэматыцы такую суму запісваюць як $\vec{v} = \int_0^t \vec{g}dt = \vec{g}t$

знайсць перамяшчэнне (каардынату x) за час t трэба прасумаваць апошняе раўнанне па ўсім часе падзення[6]:

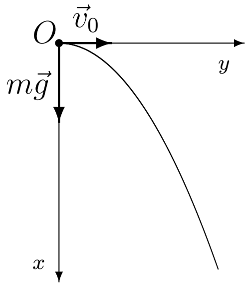
$$x = \sum_i v_{xi}\Delta t_i = g\sum_i t\Delta t_i = \frac{gt^2}{2}. \tag{15}$$

Пачатковая каардыната ў якасці складаемага сюды не ўваходзіць, таму што роўная нулю.

Суму (15) таксама можна атрымаць пабудаваўшы графік функцыі $v_x(t)$ і падлічыўшы плошчу трапецыі (пры $v_0 = 0$ — трохкутніка) пад гэтым графікам на адрэзку $(0,\ t)$.

Такім чынам, сыходзячы з агульнага закона руху, мы знайшлі як залежнасць каардынатаў (15), так і скорасці (14) ад часу. Траекторыя грузу ў сістэме адліку, звязанай з самалётам, — вертыкальная прамая.

Зараз разгледзім рух таго ж самага грузу ў сістэме адліку, звязанай з краем абрыву. Накіруем вось x вертыкальна ўніз, а вось y у накірунку руху самалёта. Вектарнае раўнанне



Малюнак 3: Рух грузу у сістэме адліку, звязанай з краем абрыву.

руху запішам у праекцыях на выбраныя восі:

$$\begin{cases} m\Delta v_x/\Delta t = F_x \\ m\Delta v_y/\Delta t = F_y \end{cases} \tag{16}$$

Рашэнне першага раўнання сістэмы (16) намі ўжо атрымана пры рашэнні задачы ў сістэме адліку, звязанай з самалётам — раўнанні (14) і (15).

Для другога раўнання сістэмы (16) пачатковыя ўмовы запісваюцца ў выглядзе:

$$F_y = 0; \qquad v_{y0} = v_0; \qquad y_0 = 0.$$

У выніку

$$m\frac{\Delta v_y}{\Delta t} = 0 \Rightarrow \frac{\Delta v_y}{\Delta t} = 0 \Rightarrow \Delta v_y = 0 \Rightarrow v_y = const \Rightarrow v_y = v_0. \tag{17}$$

Тады суадносіны для каардынаты y:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = v_0 \Rightarrow \Delta y = v_0\Delta t \Rightarrow y = v_0 t. \tag{18}$$

Раўнанне траекторыі можна адшукаць выражаючы час з раўнання (18) і падстаўляючы яго ў раўнанне (15). У выніку атрымаем

$$x = \left(\frac{g}{2v_0^2}\right)y^2. \tag{19}$$

Такім чынам, разглядая рух грузу з розных пунктаў погляду, мы атрымліваем розныя траекторыі: вертыкальную прамую і парабалу. Гэта звязана з розніцаю ў пачатковых умовах для агульных ураўненняў механічнага руху.

[6] Такая сума таксама мае ў матэматыцы асобную форму запісу $x = g\int_0^t t\,dt = \frac{gt^2}{2}$.