Элементы вектарнага аналізу

Валянцін Асташынскі

10 верасня 2007 г.

1 Асноўныя паняцці

У навуцы часта сустракаюцца велічыні, якія магчыма цалкам вызначыць пры дапамозе ўсяго аднаго ліку, так званай абсалютнай велічыні, напрыклад колькасць бульбы ў кошыку, час, тэмпература, маса і г.д. Такія велічыні называюць *скалярнымі*. Аднак шмат якія фізічныя велічыні вызначаюцца ня толькі лікам, але і накірункам, напрыклад перамяшчэнне, паскарэнне, сіла, момант сілы. Падобныя велічыні называюць *вектарнымі*. Каб адрозніваць вектарныя велічыні ад скалярных, звычайна над абазначаючым іх сімвалам ставяць стрэлку: t, s, m — скалярныя велічыні; $\Delta\vec{r}, \vec{F}, \overrightarrow{AB}$ — вектарныя велічыні.

> Цікава заўважыць, што ўсе пералічаныя прыклады вектарных велічынь запазычаны з механікі, аднак пры развіцці механікі ў часы Галілея і Ньютана вектарны аналіз не выкарыстоўваўся; больш за то, ён яшчэ нават не быў створаны! Самі тэрміны «скаляр» і «вектар» былі ўведзены толькі ў сярэдзіне XIX ст. Гамільтанам[1]. У фізіцы вектарны аналіз пачаў актыўна выкарыстоўвацца толькі пасля таго, як Максвел[2] распрацаваў электрамагнітную тэорыю і выявілася вектарная прырода электрычнага і магнітнага палёў.

Любую вектарную велічыню (вектар) можна прадставіць графічна ў выглядзе накіраванага адрэзка, даўжыня якога прапарцыйная велічыні вектара (*модулю*). У якасці дадатнага прымаецца накірунак, вызначаны стрэлкай. Напрыклад, каб пазначыць на мапе вектар перамяшчэння неабходна правесці стрэлку ад пачатковага да канцавога пункта руху. Пры такім азначэнні сумаю вектараў

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} \tag{1}$$

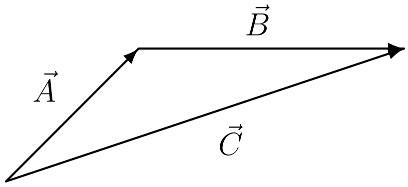
будзе сумяшчэнне пачатка вектара $\vec{B}$ з канцом вектара $\vec{A}$. Стрэлка, злучаючая пачатак вектара $\vec{A}$ з канцом вектара $\vec{B}$, вызначае вектар $\vec{C}$. Апісаная працэдура — раўнанне (1) — называецца *складанне вектараў па правілу трохкутніка* і праілюстраваная на малюнку 1. Дабудаваўшы трохкутнік да паралелаграма (малюнак 2), бачым, што для вектарнага складання існуе правіла *камутатыўнасці*:

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}. \tag{2}$$

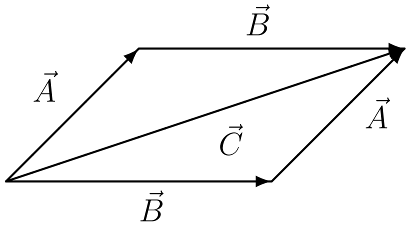
Паслядоўна прымяняючы правіла трохкутніка, можна абагульніць яго на выпадак адвольнай колькасці падсумоўваемых вектараў і сфармуляваць *правіла многавугольніка*:

[1]Уільям Р. Гамільтан (1805–1865) — ірландскі матэматык. Даў фармальнае выкладанне тэорыі комплексных лікаў. У механіцы ўвёў агульны прынцып найменшага дзеяння.

[2]Джэймс К. Максвел (1831–1879) — ангельскі фізік, стваральнік класічнай электрадынамікі, адзіны з заснавальнікаў статыстычнай фізікі.



Малюнак 1: Правіла трохкутніка пры складанні вектараў.



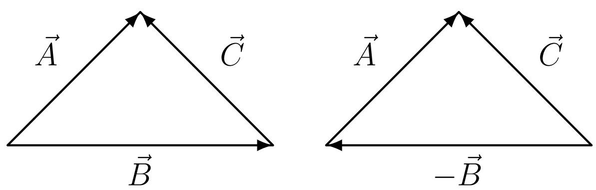
Малюнак 2: Правіла паралелаграма пры складанні вектараў.

каб атрымаць суму некалькіх вектараў, трэба сумясціць пачатак другога вектара з канцом першага, затым пачатак трэцяга — з канцом другога і г.д. Вектар, злучаючы пачатак першага вектара і канец апошняга, будзе сумаю ўсіх дадзеных вектараў.

Згодна з раўнаннем (1) азначым аперацыю *памнажэння натуральнага ліку n на вектар $\vec{A}$* як суму n аднолькавых вектараў $\vec{A}$. У выніку атрымаем вектар у n раз большы па модулю і накіраваны ў той жа бок, што і зыходны. Абагульняючы дадзенае правіла на выпадак любога рацыянальнага ліку r, бачым, што здабыткам $r\vec{A}$ будзе вектар з модулем rA, прычым пры $r > 0$ ён будзе супадаць па накірунку з вектарам $\vec{A}$, а пры $r < 0$ — накіраваны ў супрацьлеглы ад вектара $\vec{A}$ бок. Напрыклад, пры памнажэнні вектара на -1 яго модуль застаецца нязменным, але накірунак змяняецца на супрацьлеглы.

Апошні прыклад дазваляе азначыць аперацыю адымання вектараў, праілюстраваную на малюнку 3,

$$\vec{C} = \vec{A} - \vec{B} = -\vec{B} + \vec{A}. \tag{3}$$



Малюнак 3: Правіла адымання вектараў.

Як і ў выпадку памнажэння скалярных лікаў, для аперацыі памнажэння ліку на вектар існуюць законы *асацыятыўнасці* (4) і *дыстрыбутыўнасці* (5, 6):

$$(kn)\vec{A} = k(n\vec{A}), \tag{4}$$

$$(k+n)\vec{A} = k\vec{A} + n\vec{A}, \tag{5}$$

$$k(\vec{A} + \vec{B}) = k\vec{A} + k\vec{B}. \tag{6}$$

Трэба азначыць, што магчымасць задаць накірунак фізічнай велічыні не з'яўляецца дастатковай умовай таго, што яна будзе вектарам. Можна паспрабаваць задаць «вектар» сілы току накіраваны па датычнай да праваднiка, але як паказваюць шматлікія доследы, у месцах злучэння сіла тока складаецца алгебраічна, а значыць з'яўляецца скалярнай велічынёй. Такім чынам, вектарам будзе велічыня, якая характарызуецца не толькі модулем і азначаным накірункам, але падпарадкоўваецца правілу складання вектараў.

2 Здабытак вектараў

Вызначыўшы паняцце вектараў можна перайсці да разгляду іх здабытку. У прынцыпе, магчыма задаць любыя матэматычна несупярэчлівыя аперацыі перамнажэння вектараў, але мы абмяжуемся толькі тымі двума з усіх магчымых, якія часцей за ўсё сустракаюцца ў фізіцы. Спачатку разгледзім здабытак кшталту $AB\cos\theta$, дзе A і B — модулі двух вектараў, а θ — вугал паміж імі. Паколькі ўсе множнікі ў гэтым выразе — скалярныя лікі, вынікам перамнажэння таксама будзе скалярны лік. Напрыклад, выраз

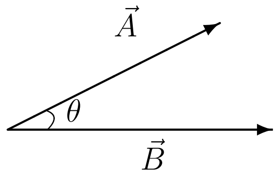
$$\text{работа} = \text{сіла} \times \text{перамяшчэнне} \times \cos\theta$$

звычайна разглядаюць як здабытак модуля перамяшчэння з праекцыяй сілы на напрамак уздоўж яго.

Скалярным здабыткам двух вектараў $\vec{A}\cdot\vec{B}$, утвараючых паміж сабою вугал θ (малюнак 4), будзем называць здабытак іх модуляў з косінусам вугала паміж імі:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta. \tag{7}$$

Кропка паміж двума вектарамі абазначае скалярны здабытак!



Малюнак 4: Да азначэння скалярнага здабытку.

Калі вядома, што $\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$, але пры гэтым $\vec{A} \neq 0$ і $\vec{B} \neq 0$, то на падставе раўнання (7) $\cos\theta = 0$, а $\theta = 90°$, $270°$ і г.д. У такім выпадку вектары $\vec{A}$ і $\vec{B}$ павінны быць перпендыкулярнымі, ці інакш кажучы, $\vec{A}$ і $\vec{B}$ *артаганальны*. Таксама з (7) вынікае, што скалярны здабытак вектара з самім сабою роўны квадрату модуля гэтага вектара: $\vec{C}\cdot\vec{C} = C^2$.

Згодна з азначэннем скалярны здабытак *камутатыўны*:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}. \tag{8}$$

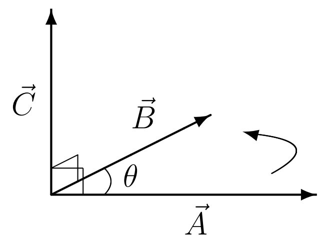
Можна паказаць, што скалярны здабытак таксама будзе *дыстрыбутыўны* адносна складання вектараў:

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\vec{C}. \tag{9}$$

Другая форма здабытку вектараў звязана з выкарыстоўваннем сінуса вугала ўтворанага двума вектарамі. Напрыклад, момантам сілы называюць здабытак модуля сілы з даўжынёй пляча сілы, прычым плячо можна вызначыць як адлегласць ад восі вярчэння да пункта прыкладання сілы памножаную на сінус вугала паміж гэтай адлегласцю і накірункам дзеяння сілы. Вынікам такога здабытку двух вектараў таксама будзе вектар.

Назавем *вектарным здабыткам двух вектараў* вектар $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ артаганальны як вектару $\vec{A}$, так і вектару $\vec{B}$, модуль якога вызначаецца выразам $|\vec{C}| = |\vec{A}||\vec{B}| \sin\theta$ (θ — вугал паміж $\vec{A}$ і $\vec{B}$) і утвараючы з вектарамі $\vec{A}$ і $\vec{B}$ так званую *правую тройку* (пры вярчэнні карацейшым чынам ад $\vec{A}$ да $\vec{B}$ вінта з правай разьбой, ён павінен рухацца ўздоўж $\vec{C}$).

Крыжык паміж двума вектарамі абазначае вектарны здабытак!



Малюнак 5: Да азначэння вектарнага здабытку.

> Накірунак вектара $\vec{C}$ таксама можна вызначыць з дапамогаю *«правіла правай рукі»*. Трэба сагнуць пальцы правай рукі ў накірунку ад вектара $\vec{A}$ да вектара $\vec{B}$; пры гэтым вялікі палец пакажа накірунак вектарнага здабытку.

Пры азначаным выбары накірунку вектарны здабытак *антыкамутатыўны*:

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}, \tag{10}$$

гэта значыць пры запісе абавязкова трэба ўлічваць парадак множнікаў.

Калі вектары $\vec{A}$ і $\vec{B}$ перпендыкулярныя, то ўсе тры вектары $\vec{A}$, $\vec{B}$ і $\vec{C}$ будуць узаемнаартаганальныя.

Таксама як і скалярны здабытак, вектарны здабытак *дыстрыбутыўны* адносна складання вектараў:

$$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}. \tag{11}$$

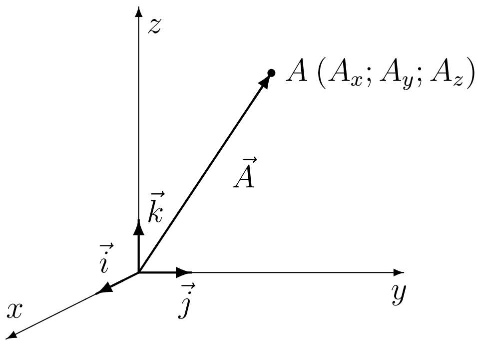
> Камбінацыя вектараў $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$ вядома як *змяшаны здабытак*. Здабытак $\vec{B} \times \vec{C}$ дае вектар, які затым памнажаецца на вектар $\vec{A}$, у выніку чаго атрымліваецца скалярная велічыня. Трэба заўважыць, што $(\vec{A} \cdot \vec{B}) \times \vec{C}$ ёсць вектарны здабытак скаляра з вектарам, а такая аперацыя намі не вызначана. Таму пры запісе змяшанага здабытку можна апусціць дужкі: $\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C}$.

3 Каардынаты вектара

Уведзенае ў раздзеле 1 паняцце вектараў як геаметрычных аб'ектаў дазваляе працаваць з імі без увядзення якой-небудзь сістэмы каардынатаў. Але пры рашэнні некаторых задач больш зручна прадстаўляць вектар у выглядзе сумы яго праекцый на адпаведныя каардынатныя восі.

Зададзім прамавугольную дэкартаву сістэму каардынатаў $Oxyz$ у выглядзе трох узаемнаперпендыкулярных восей x, y і z. Маштаб сістэмы азначым трыма адзінкавымі вектарамі $\vec{i}$, $\vec{j}$ і $\vec{k}$ — *ортамі*, накіраванымі ўздоўж адпаведных восей (малюнак 6):

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1; \quad \vec{i} \perp \vec{j}; \quad \vec{i} \perp \vec{k}; \quad \vec{j} \perp \vec{k}, \tag{12}$$



Малюнак 6: Правая дэкартава сістэма каардынатаў.

прычым, *правая* сістэма каардынатаў вызначаецца дадатковай умовай:

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}. \tag{13}$$

Тады для адвольнага пункта прасторы A з каардынатамі $(A_x; A_y; A_z)$ можна задаць адпаведны вектар $\vec{A}$, праведзены з пачатку каардынатаў у гэты пункт. Каардынаты A_x, A_y і A_z будуць з'яўляцца *праекцыямі вектара* $\vec{A}$ на адпаведныя восі. Згодна з правілам шматвугольніка для складання вектараў

$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}, \tag{14}$$

а вектары $A_x\vec{i}$, $A_y\vec{j}$ і $A_z\vec{k}$ называюцца кампанентамі вектара $\vec{A}$.

Каардынаты A_x A_y і A_z цалкам задаюць вектар, бо яго модуль знаходзіцца як дыяганаль прамавугольнага паралелепіпеда па тэарэме Піфагора:

$$A = \sqrt{{A_x}^2 + {A_y}^2 + {A_z}^2}, \tag{15}$$

а накірунак можна вызначыць праз косінусы вуглоў паміж вектарам і каардынатнымі восямі:

$$\cos\alpha = \frac{A_x}{A}; \quad \cos\beta = \frac{A_y}{A}; \quad \cos\gamma = \frac{A_z}{A}. \tag{16}$$

Калі зададзены два вектара $\vec{A}$ $(A_x; A_y; A_z)$ і $\vec{B}$ $(B_x; B_y; B_z)$, то іх сума вызначаецца стасункам

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\vec{i} + (A_y + B_y)\vec{j} + (A_z + B_z)\vec{k}, \tag{17}$$

скалярны здабытак

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z, \tag{18}$$

а вектарны здабытак

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\vec{i} + (A_zB_x - A_xB_z)\vec{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\vec{k}. \tag{19}$$